Die Infinitesimalgedanken in Leibnizens Metaphysik.

Von

Cand. prob. Dr. J. Sturm.

Beilage zum Programm des Königlichen Realprogymnasiums
zu Briesen Westpr.

Briesen Westpr.
Gedruckt bei Paul Gonschorowski.

1907. Nr. 47.

Die Infinitesimalgedanken in Leibnizens Metaphysik

von **Dr. J. Sturm.**

Wenn wir von Leibnizens Metaphysik sprechen, so können wir uns darunter kein abgeschlossenes, einheitliches System der Philosophie denken; ein solches hat Leibniz uns nicht hinterlassen. Er sammelte seine Materialien allerorten und fand sie auch beinahe überall, in der Wissenschaft, wie im Leben, bei Freunden und Feinden. Er ordnete jedoch diese Materialien nur, gestaltete sie um und stellte Prinzipien und Ideen auf, nach welchen dieselben in ein umfassendes System oder Gedankengebäude gebracht werden könnten. Aber er selbst hat dieses Gebäude nicht errichtet. Zwar standen die Hauptgrundzüge desselben klar vor seinem Geiste, aber er entwarf weder selbst den Bauplan noch leitete er den Bau.

Wie sehr wir diese Tatsache bedauern müssen und mögen, so besteht doch keine Ungewissheit über die Prinzipien, auf die seine Philosophie sich gründet. In einer Menge von Streitschriften und kleineren Gelegenheitsschriften finden wir sie aufs klarste dargelegt. Auch viele Abhandlungen, die das Resultat seines Denkens und das Ergebnis seiner Erfahrungen darstellen, besitzen für uns das grösste Interesse, wollen wir die Prinzipien der Leibnizschen Philosophie kennen lernen.

Ein Überblick über das Leben Leibniz' zeigt uns, dass er sich erst philosophischen Studien widmete, nachdem er sich mit logischen, juristischen und mathematischen Studien vertraut gemacht hatte. Es wird uns daher nicht überraschen, wenn er aus diesen Gebieten gewisse Leitbegriffe in sein philosophisches Denken überträgt. Überall finden wir, dass seine Philosophie sich am Studium der Einzelwissenschaften genährt hat. In hohem Masse müssen wir dies von der Mathematik behaupten. Leibnizens eigener Ausspruch, seine Metaphysik sei ganz Mathematik, und es tue den Mathematikern ebenso not Philosophen, wie den Philosophen Mathematiker zu sein, beweist uns zur Genüge, wie sehr er selber von der Wichtigkeit der Mathematik für seine Philosophie durchdrungen war. So stossen wir denn fast in allen seinen Schriften auf Ideen und leitende Grundsätze, die durchaus mathematischen Charakters sind. Die ersten mathematischen Kenntnisse wurden Leibniz bekanntlich durch Erhard W e i g e l vermittelt. Als Mathematiker war Weigel vor allem Algebraiker: Arithmetik, Kombinationslehre und niedere Analysis werden als Gegenstände seines Unterrichts genannt.[1]) Zugleich aber verbindet er mit der Ausbildung der Algebra ihre Schätzung als eine Methode der Metaphysik und als ein Mittel zur Lösung ihrer wichtigen Grundprobleme. So enthält seine „rechenschaftliche Sittenlehre" den paradoxen Satz, dass das Dasein Gottes aus dem Anfang des Einmaleins, aus dem Satze: $1 \times 1 = 1$ abzuleiten ist.[2]) In dieser Erhebung des Zahlbegriffs zu metaphysischer Geltung erkennen wir ein Motiv, das uns in Leibniz' Werken aus jener Zeit entgegentritt. Schon die früheste Schrift „De principio individui" (1663) enthält

[1]) Guhrauer, Leibniz' Leben I, 26. [2]) Theodice, 384.

die These, dass die „Wesenheiten der Dinge sich wie die Zahlen verhalten“.[1]) In seiner ersten Dissertation „De arte combinatoria“ vertritt er die Ansicht, dass alle Regeln der Arithmetik, nach denen die Verbindungen einer Anzahl Elemente gefunden werden, auf ähnliche Verfahrungsweisen in den anderen Wissenschaften anwendbar seien. Sein Streben nach grösster Genauigkeit in Wissenschaft und Sprache brachte ihn dazu, in der Methode der Algebra ein Vorbild für alle Denkprozesse zu sehen. In dieser Disziplin treten an Stelle der Worte Zeichen, die jede Zweideutigkeit autheben. Wären wir also im stande, alle Begriffe, mit welchen die abstrakten Wissenschaften operieren, auf einfache Ideen zurückzuführen, so könnten wir ihre möglichen Verbindungen berechnen, diese mittels allgemeiner Zeichen ausdrücken und so die Genauigkeit und Vollständigkeit mathematischer Schlussweise erhalten.[2]) Leibniz war von der Brauchbarkeit dieser Methode überzeugt. Er sagt darüber: „Ich denke, dass einige Auserlesene das Ganze in fünf Jahren leisten können, dass sie jedoch schon nach zwei Jahren dahin kommen werden, die Lehren, d. h. die Sätze der Moral und Metaphysik nach einem unfehlbaren Rechenverfahren zu beherrschen.“[3]) Und weiter sagt er: „Wenn eine Sache nicht klar ist, so ist sie nicht auf Zahlen zurückgeführt“. Dass es ihm selber nicht gelang, diese Methode fruchtbar zu machen, bedauerte er sehr, aber er schrieb es nur dem Umstande zu, dass er zu wenig mit der Mathematik vertraut war. Über seine Schrift „de arte combinatoria“ fällte er später folgendes Urteil: „Freilich merkt man dieser Abhandlung an, dass sie das Werk eines Jünglings ist, der eben erst die Schule verlassen hatte, und noch nicht mit den realen Wissenschaften vertraut war; neque enim, fährt er fort, illis in locis mathematika excolebantur et si Parisiis exegissem pueritiam, quem ad modum Pascalius, forte maturius ipsas scientias auxissem.[4])

Trotzdem konnte er später in dem Prioritätsstreit um die Erfindung der Differentialrechnung auf seine „ars combinatoria“ verweisen, aus der sich in der Tat die Idee der Differentialrechnung, wenn auch nur als eine Ahnung herauslesen lässt. Merkwürdigerweise ist der in dieser Beziehung deutlichste Gedanke in den Corollarien unter der Überschrift „Metaphysica“ enthalten. Der Satz „Infinitum aliud alio maius est“, konnte erst vollkommen durch die Differentialrechnung verstanden werden, die ja bestimmte Werte für das Verhältnis des einen Unendlichen zu einem anderen berechnet. Dass hier schon der Satz als eine „metaphysische Wahrheit auftritt und neben die These „Deus est substantia, creatura accidens“ gestellt wird, das ist bezeichnend für die innige Verbindung, in der Mathematik und Metaphysik bei Leibniz miteinander stehen.

Im Jahre 1672 trat Leibniz seine bedeutungsvolle Reise nach Paris in einer politischen Mission des Mainzer Hofes an.[5]) Hier lernte er die hervorragendsten Vertreter auf dem Gebiete der Mathematik kennen. Vor allem die Bekanntschaft, welche er mit dem unvergleichlichen Huyghens machte, ist für seine fernere Arbeiten und Leistungen die bedeutsamste geworden. Huyghens war ein tüchtiger Mathematiker und genialer Physiker. Er besonders hat Leibniz zum eifrigen Studium in der Mathematik angeregt, um später von seinem grossen Schüler überflügelt zu werden. Vier Jahre blieb Leibniz in Paris, und wenn auch seine politischen Projekte scheiterten, sein ausserordentlicher Eifer hatte den Erfolg, dass er als Mathematiker ebenbürtig neben Newton stand; er hatte die Infinitesimalrechnung gefunden. Von seiner Freude und seinem Eifer bei den mathematischen Studien gibt uns ein Brief um 1680 an die Herzogin Sophie von Hannover Kunde: „Les voyages me donnèrent la connaissance de ces grands personnages, qui me firent prendre goût aux mathematiques. Je m'y attachai avec une passion presque démesurée pendant les quatre années, que je demeurai à Paris. Ce fut avec de succès et d'applaudissement, qu'un apprentif et un étranger ne pouvait attendre“.[6])

---

1) Erdmann, S. 5. 2) De arte combinatoria § 63, Erdm. 23. 3) Phil. VII. 184—189. 4) Historia et commendatio linguae charactericae universalis. Erdmann, 162 f. 5) Man hoffte, Deutschland zu retten, indem man Ludwig XIV. zu einem Feldzug nach Aegypten zu bewegen suchte. 6) Phil. IV. 291.

Die Entdeckung der Infinitesimalrechnung entsprang hauptsächlich aus den neuen geometrischen Problemen, mit denen Leibniz die Mathematiker in Frankreich beschäftigt fand. Die analytische Geometrie, welcher Descartes die allgemeinste Form gegeben hatte, war dort vollständig eingebürgert. Ihre umfassende Bedeutung liegt darin, dass sie die Kurven durch eine Gleichung zwischen veränderlichen Grössen definiert, und dass sie umgekehrt jede Abhängigkeit zwischen zwei Veränderlichen in dem anschaulichen Bilde einer Kurve betrachten lässt. Nun versuchte man weiter die von den Kurven umschlossenen Flächen zu bestimmen und die Kurvenlänge zu messen. Die alte Methode des Archimedes zur Quadratur der Parabel hatten Keppler und Kavalieri verallgemeinert. Besonders der letzere hatte schon, wenn auch nicht begrifflich korrekt, so doch als ein richtig leitendes Prinzip, die „unteilbaren Grössen" als die äussersten Elemente, aus denen sich der Flächeninhalt oder das Volumen zusammensetzt, in die Untersuchung eingeführt. Neben diesen alten Problemen entstanden auch wesentlich neue, die namentlich von Newton und Huyghens bearbeitet wurden. Die Schrift des grossen Franzosen „Horologium oscillatorium" enthielt ausser der reichsten Fülle mechanischer Prinzipien und Resultate zum ersten Male die Lehre vom Krümmungskreise und der Evolute. Andrerseits hatte Newton die Theorie der unendlichen Reihen geschaffen, die sich für die Längen- und Flächenbestimmung bei Kurven als ausserordentlich fruchtbar erwies.

Einem grossen Geiste, wie Leibniz, wurde es nicht schwer, diese Methoden sich anzueignen und selbständig zu bearbeiten. Seine grosse Leichtigkeit, auf die Ideen und Bestrebungen anderer Denker einzugehen, seine Neigung, jeden Gegenstand und jede Gedankenfolge bis auf ihre Grundbedeutung zu verfolgen, und sein Vermögen, zu verallgemeinern erhoben ihn zu einem willkommenen und erfolgreichen Arbeiter auf dem neuen Forschungsgebiete. „Zwei Umstände", sagte er von sich selbst, „haben mir ausserordentlich gedient, obwohl sie sonst gefährlich und Vielen schädlich zu sein pflegen: dass ich Autodidakt war und in jeder Wissenschaft kaum, dass ich an sie herangetreten, Neues suchte, da ich oft nicht einmal das Gewöhnliche hinlänglich verstand."[1]) Vor allem war es das alte Problem der Quadratur des Kreises, das ihn sehr beschäftigte, und dessen exakte analytische Lösung ihm bald gelang. Da beim Kreise die Ordinaten nicht rational, sondern mittels einer Quadratwurzel von den Abscissen abhängen, suchte er eine Fläche zu konstruieren, die dem Kreis gleich ist und deren Ordinaten rationale Funktionen der Abscissen sind. Die Konstruktion dieser Fläche gewann er leicht, indem er die Subtangenten einführte. Er setzte somit an Stelle der Funktion arc sin x die Funktion arc tg x; um diese zu berechnen, brauchte er nur an einer geometrischen Progression (der Reihe für $\frac{1}{1+x^2}$) seine neue Operation auszuführen, welche er zuerst einfach eine Summation, später aber nach dem Vorschlag von Joh. Bernoulli die Integration nannte. Somit müssen wir die einfache Integralformel $\int_0^x \frac{dx}{1+x^2} = \text{arc tg } x$ historisch als das Fundament der Integralrechnung bezeichnen. Gleichzeitig trat dem Entdecker an dem „charakteristischen Dreieck", welches von der Tangente und den Koordinatenaxen gebildet wird, im geometrischen Bilde die Bedeutung entgegen, welche das Verhältnis zwischen der Differenz der Ordinate und der Differenz der Abscissen gewinnt, wenn diese Differenzen unendlich klein, oder, wie er es nannte, Differentialien werden. Damit war Leibniz zu den zwei wichtigsten Begriffen seiner Infinitesimalrechnung gelangt; es würde jedoch zu weit führen, wenn ich zeigte, welche hervorragende Anwendungen er von seiner neuen Methode machte, wie eine Unzahl ungelöster Probleme durch sie spielend erledigt wurde und mit welcher Geschwindigkeit

---

1) Guhrauer, G. W. Leibniz I. 26.

und Geschicklichkeit er selber seine Methode zu handhaben verstand. Hier soll nur untersucht werden, wie der geniale Geist Leibnizens die Hauptbegriffe seiner Infinitesimalmethode sich gedacht hatte, wie sie aus seinem strengen logischen Denken entsprungen sind.

Ein Prinzip, welches für die Leibnizsche Mathematik, sowie für seine Philosophie von ausserordentlicher Bedeutung ist, ist das Gesetz der Kontinuität. Leibniz selbst nimmt wiederholt seine Urheberschaft in Anspruch und weist an zahlreichen Stellen seine Fruchtbarkeit nach. Er sagt darüber in den Nouvelles de la Republique des Lettres (1687): [1]) „Es ist von unbedingter Notwendigkeit in der Geometrie, bewährt sich jedoch in der Physik, da die höchste Weisheit, die der Quell der Dinge ist, die vollkommenste Geometrie ausübt und eine Harmonie beachtet, an deren Schönheit nichts heranreicht. Man kann es folgendermassen formulieren: Wenn sich in der Reihe der gegebenen und vorausgesetzten Elemente der Unterschied zweier Fälle unbegrenzt vermindern lässt, so muss er notwendig auch in den gesuchten oder abhängigen Elementen unter jede beliebig kleine Grösse sinken.“ Oder wie er kurz sagt: „Datis ordinatis etiam quaesita sunt ordinata.“[2]) Es handelt sich also darum, zwei Reihen veränderlicher Grössen zu betrachten, die durch eine allgemeine Funktionsbeziehung verknüpft sind: Das Prinzip der Kontinuität fordert alsdann, dass der Unterschied zweier benachbarter Funktionswerte kleiner als jede beliebig kleine Zahl gemacht werden kann, wenn man in den Werten der unabhängigen Veränderlichen die Differenz klein genug wählt. Das Prinzip ist also nur ein anderer Ausdruck der allgemeinen Bedingung für die Stetigkeit einer Funktion: es muss sich zu jeder Zahl ε eine entsprechende Zahl δ so angeben lassen, das für $|x_0 - x| < \delta$ $|f(x_0) - f(x)| < \varepsilon$ wird. Unter den Beispielen, die Leibniz für das Prinzip der Kontinuität anführt, macht er eine Trennung zwischen Fällen des Gesetzes, die zur Mathematik und solchen, die zur Mechanik gehören. Aus der ersten Gruppe seien angeführt: der stetige Übergang der Ellipse in die Parabel, die Auffassung der Parallelen als konvergente Linien mit unendlich fernem Schnittpunkt; aus der zweiten Gruppe sei als Beispiel herangezogen, dass die Ruhe kraft des Stetigkeitsgesetzes ein Spezialfall der Bewegung, nämlich unendlich kleine Bewegung ist. Damit kommen wir auf den Begriff des Unendlichen, speziell auf den Begriff des Unendlich-Kleinen. Was Leibniz darunter verstand, ersehen wir besonders aus seinem Briefe an Varignon vom 2. Februar 1702.[3]) Dieser hatte ihn gebeten, ihm eine genauere Auseinandersetzung über das Unendliche zu geben. Er antwortete ihm darauf folgendes: „Ich begnügte mich, dass Unendliche durch das Unvergleichliche zu erklären, d. h. Grössen anzunehmen, die unvergleichlich grösser oder kleiner als die unsrigen sind. Auf diese Weise nämlich erhält man beliebig viele Grade unvergleichlicher Grössen, sofern ein unvergleichlich viel kleineres Element, wenn es sich um die Feststellung eines unvergleichlich viel grösseren handelt, bei der Rechnung ausser Acht bleiben kann.“

Daraus könnte man leicht den Schluss ziehen, dass das Unendlich-Kleine eine bestimmte, konstante Grösse sein müsse. Dies hat Leibniz aber stets mit aller Entschiedenheit zurückgewiesen. Eine besonders charakteristische Äusserung hierüber findet sich ausser in dem oben angeführten Briefe in einer Abhandlung, die Gerhardt als Anhang zu der Leibnizschen Schrift „Historia et origo calculi differentialis“ veröffentlicht hat.[4]) Es heisst dort: „Das Unendlich-Kleine oder Grosse kann man immer als das beliebig Kleine oder Grosse ansehen, sodass der Ausdruck stets nur einen bestimmten Inbegriff oder eine Gesamtgattung, nicht aber ein einzelnes „letztes“ Glied innerhalb dieser Gattung bezeichnet. (ut ita se habeat veluti quoddam gens, non veluti aliquod ultimum in eo genere.) Gegen Joh. Bernoulli führt Leibniz aus, dass der Fortschritt der Teilung zu „infinitesimalen Teilen“ so wenig wie zu einem Minimum gelange, sondern sich durchweg

[1]) Math. VI. 129—135. [2]) Erdm. 104; vgl. Phil. IV. 375. [3]) Math. IV. 89—94; vgl. Math. V. 350. [4]) Halle 1885.

innerhalb gewöhnlicher Grössen bewege, die sich zwar beständig vermindern, niemals aber ihren Charakter als endliche Zahlen verlieren können.[1]) Wollte man einer Einzelgrösse das Prädikat des Unendlich-Kleinen beilegen, so ist dass ein Widerspruch in sich. In dem Begriff des unvergleichlich Kleinen handelt es sich eben nicht um eine fixe Grösse sondern um eine Veränderliche, die unter jeden gegebenen Wert sinken kann.[2])

Da das Differential eine unendlich kleine Grösse ist, so ist es leicht, aus dem vorher Angeführten sich eine Vorstellung von dem Leibnizschen Begriffe des Differentials zu machen. Der erste Gedanke des Differentials geht, soweit die Algebra in betracht kommt, auf die Reihendifferenzen zurück. Diese gelten aber als Ursprung der Reihe selbst, als die erzeugenden Differenzen. (differentiae generatrices.)[3]) Erzeugend, weil aus ihnen die Reihe in ihrer Unendlichheit aus einem bestimmten Gesetze sich herleitet. Lässt man diese Differenzen unendlich klein werden, d. h. sie den Grenzwert Null annehmen, so gelangen wir zum Differential. Worin die logische Bedeutung des Differentials liegt, ergiebt sich aus folgendem: Der Übergang zur Null hebt wohl die Quantität einer Grösse auf, nicht aber ihre Gesetzlichkeit. Die Null als Grenze hat somit durchaus positive Bedeutung. Das Differential, das seiner extensiven Quantität nach Null ist, ist seinem Begriffe nach durch all die Relationen, durch die das x definiert ist, vollkommen bestimmt. Die begriffliche Bestimmtheit bleibt, auch wenn die Quantität aufgehoben wird, fortbestehen. Demnach ist das Differential quantitativ allerdings Null; jedoch niemals ist es gleich einer, wenn auch noch so kleinen konstanten Grösse. Schon die Frage nach seiner Grösse entfernt, wie immer die Antwort ausfallen mag, das Problem von seinem eigentlichen Gebiete. Das Differential ist nicht als Einzelquantum, sondern lediglich in dem Prozess verständlich, in dem wir den gesetzlichen Übergang zur Grenze vollziehen. Die Übereinstimmung des Differentials mit der Null betrifft nur das negative Merkmal der Unterscheidung gegen die Extension, nicht seine positive Charakteristik. Für diese liegt das Wesentliche darin, dass das Differential die Grösse selbst in all ihren qualitativen Beziehungen in begrifflicher Vollständigkeit zu repräsentieren vermag. „Jnterea infinite parva concipimus non ut nihila simpliciter et absolute, sed ut nihila respectiva . . . id est ut evanescentia quidem in nihilum retinentia tamen characterem eius quod evanescit".[4])

Diese Erhaltung des Begriffscharakters ermöglicht es, in den Differentialien und durch sie die Grössen in ihren spezifischen Unterschieden festzustellen. Die Infinitesimalausdrücke bilden das methodische Fundament der Möglichkeit qualitativer Unterscheidung von Inhalten. Die Erhaltung der begrifflichen Eigenart bei Vernichtung der Extension lässt sich im allgemeinen bereits bei der einfachsten Art der Abhängigkeit von Grössen, bei dem algebraischen Verhältnis nachweisen. Solange die Proportion sich noch an bestimmten extensiven Grössenwerten ausspricht, besteht der Anschein, als sei sie nur der Ausdruck dafür, wie oft das eine Glied in dem anderen enthalten, wie es also aus ihm durch successive Setzung von Teileinheiten zu gewinnen ist. Die Abstraktion von dem absoluten endlichen Grössenwert der Glieder lässt das Verhältnis erst in seinem reinen logischen Werte hervortreten, nach dem es eine gesetzliche Zuordnung bedeutet, die von dem Material, an das der Ausdruck gebunden bleibt, ihrem Sinne nach unabhängig ist. In diesem eminenten logischen Geltungswert liegt der eigentliche Schutz gegen die gleichmässige Nivellierung des Differentials zur algebraischen, in sich völlig ununterscheidbaren Null. Leibniz erläutert dies in seiner „Rechtfertigung des Infinitesimalkalkuls durch die gewöhnliche Algebra" an einem Beispiel[5]): Zwei variable Grössen c und e sind durch die Voraussetzung der Aufgabe in Beziehung mit einander gesetzt, sodass $c < e$. Diese Beziehung ist nicht an irgendwelche absolute Grössenwerte von c und e gebunden, sie muss also auch erhalten bleiben, wenn wir diese Werte einer stetigen Umformung unter-

[1]) Math. III. 524. [2]) Math. IV. 92 und 98. [3]) Math. I 27 ff. [4]) Math. IV. 218 an Grandi [5]) Math. IV. 104.

werfen. Die Relation zwischen c und e bleibt also gedanklich auch bestehen, wenn wir beide Variabeln schliesslich zur Grenze Null übergehen lassen. Somit sind auch nach diesem Übergang die beiden veränderlichen Grössen nicht völlig im logischen Sinne zu nichte geworden; sondern es kommen ihnen formale Eigentümlichkeiten und Verhältnisse zu, die sie charakterisieren und in ihrer Wechselbeziehung bestimmen. Wären sie im absoluten Sinne Nichts, böten sie keinerlei begriffliche Merkmale und Charaktere mehr dar, so wären sie offenbar ganz ununterscheidbar und durcheinander in jeder Beziehung ersetzbar. („comme un rien vaut l'autre.") Das würde aber zu einem Widerspruch in der Voraussetzung der Aufgabe führen.

Fragen wir uns nun, wie Leibniz diese Infinitesimalgedanken, die er aus seiner neuen Methode gewonnen hatte, die aber zum Teil schon vor deren Erfindung in seinem Geiste feststanden, in seiner Metaphysik verwendet hat. Das einzige Werk sozusagen, in dem Leibniz einen vollständigen Ueberblik über sein gesamtes System gibt, ohne dass wir hier, wie in den meisten anderen Schriften einen polemischen Anstrich und ein persönliches Gepräge finden, das durch ihren Zweck, nämlich seine Ansichten oder die seiner Gegner zu bekämpfen, bedingt war, ist die Monadologie. Hier begegnet uns das, was er sonst nur aphoristisch hinwarf, mitten unter fremde, bestrittene und geduldete Ideen, oder als geistreiche Axiome aufstellte, seine tiefsten zerstreuten Gedanken und scharfsinnigsten Kombinationen, gesammelt wie in einem Brennpunkte, in dem, am Ende seines Lebens, das der Wissenschaft und der Welt wie kein anderes gewidmet war, alle Strahlen seines Geistes und Wissens zusammenflossen. Ist es da wunderbar, dass wir in dieser trefflichen Abhandlung seine Lieblingsgedanken, die Infinitesimalgedanken allerorten wiederfinden!

Nehmen wir zuerst den Begriff der Monade, so zeigt sich, dass er nach Leibnizens Definition weiter nichts sein kann, als eine Uebertragung des mathematischen Begriffes des Unendlich-Kleinen oder besser gesagt des Differentials in die Metaphysik. Wir sahen, dass das Differential zwar in quantitativer Beziehung Null, also ohne Ausdehnung ist, dass es jedoch, da die qualitativen, begrifflichen Eigenschaften beim Uebergang zur Null fortbestehen bleiben, die Grösse selbst in all ihren qualitativen Beziehungen zu repräsentieren vermag. Ueber die Monaden sagt Leibniz in seiner Monadologie und an vielen anderen Stellen: „sie sind einfache Substanzen, welche Verbindungen mit eben solchen zu zusammengesetzten Substanzen eingehen." Und weiter: „das Zusammengesetzte ist nichts als eine Anhäufung oder ein aggregatum von Einfachem." Das Einfache ist also das Unendlich-Kleine, und das Zusammengesetzte oder der Körper ist die Summe von unendlich kleinen Momenten. Leibniz versteht unter diesem Einfachen nicht etwa Atome, denn diese besitzen nach ihrer Definition Ausdehnung, wenn wir auch nicht im stande sind, sie mit unseren Hilfsmitteln weiter zu zerlegen. Er sagt darüber in seinem Nouveau Système [1]): „Die Atome der Materie widersprechen der Vernunft, ausserdem sind sie ja selbst noch aus Teilen zusammengesetzt. Denn dadurch, dass diese Teile zusammenhängen, hört noch nicht ihre Verschiedenheit als Teile auf." Wäre nämlich die Materie nicht bis ins Unendliche teilbar, so würde die Stetigkeit der Erscheinungen darunter leiden, und das mathematische Verfahren, endliche Grössen als aus einer unendlichen Anzahl unendlich kleiner Grössen zusammengesetzt zu betrachten, würde unrichtig sein. Dass die Monaden wirklich analog den Differentialien zu denken sind, geht aus folgendem hervor. Nach Leibniz besitzen die Monaden keine Ausdehnung, sie sind gleich Null. Auch die Differentialen sind ja ihrer Ausdehnung oder Quantität nach in aller Strenge Null. Ebenso aber auch wie beim Uebergang zur Null die Wesenheit, die Qualität der Differentialien bestehen bleibt, sie also im stande sind die Grösse, aus der sie nach dem Gesetze der Kontinuität sich herleiten, zu repräsentieren, so sind auch die Monaden, obwohl

1) Erdm. S. 124.

räumlich ohne Ausdehnung, doch qualitativ bestimmt. Infolgedessen kann Leibniz mit Recht von ihnen sagen, sie seien die Elemente der Dinge. Darauf beruht auch die Verschiedenheit der einzelnen Monaden untereinander. Wir sahen, dass in der Infinitesimalrechnung für verschiedene Variable auch die Grenze Null ganz verschiedene Werte hat und durchaus nicht gleich der algebraischen Null ist, die in sich ganz ununterscheidbar ist. Aehnliches gilt auch von den Monaden. In bezug auf die Qualität sind alle Monaden, obwohl sie der Quantität nach völlig gleich, nämlich Null sind, von einander verschieden. Leibniz sagt darüber [1]: „Jede Monade muss verschieden sein von jeder anderen, denn schon in der Natur gibt es nicht zwei Wesen, die einander vollkommen gleich sind, und wo wir äusser stande wären, eine auf eine innere Beschaffenheit gegründete Verschiedenheit nachzuweisen.“ Um dies zu begründen, sagt er weiter: „Ohne diese Verschiedenheit würde jedes Mittel fehlen, irgend einen Wechsel an den Dingen gewahr zu werden, weil dasjenige, was am zusammengesetzten erscheint, nur von den einfachen Bestandteilen (ingrediens) desselben herrühren kann. Bei den Monaden aber, sobald sie gar keine Qualitäten hätten, wäre eine von der anderen ganz und gar nicht verschieden, nicht einmal der Quantität nach differierend: folglich würde, den Raum als erfüllt vorausgesetzt, jeder Ort der Bewegung beständig nichts Anderes als ein vollkommenes Aequivalent dessen erhalten, was er schon früher besass, mithin jeder Zustand des Dings jedem anderen in allen Stücken völlig gleich sein.“ Worin diese Qualitäten bestehen, ob sie erkennbar seien oder nicht, darüber spricht sich Leibniz nirgendwo entscheidend aus. Man kann annehmen, dass er darunter dasjenige verstanden habe, was er détail de ce qui se change nennt, und worin der Grund liegt, dass in jeder Monade zu einem gegebenen Zeitpunkte gerade diese und keine anderen Zustände stattfinden können, als diejenigen, welche in jenem Zeitpunkte in ihr wirklich stattfinden. In jeder Monade gehen also beständig Veränderungen vor sich und zwar erfolgen sie ganz kontinuierlich. Jede Monade durchläuft fortwährend verschiedene Modifikationen oder Zustände ihres Wesens, die ihrer eigentümlichen Qualität entsprechen. Diese Veränderungen sind es auch, welche die spezifische Verschiedenheit und bunte Mannigfaltigkeit der Monaden untereinander begünstigen. Das Gesetz, nach welchem diese Veränderungen vor sich gehen, muss notwendigerweise jeder Monade innewohnen, er muss mit ihr erschaffen sein. Da nun, wie wir gesehen haben, jede Monade von der anderen qualitativ verschieden ist, so muss also jeder Monade ein anderes Gesetz für den Veränderungsablauf innewohnen. Fragen wir nun, welcher Zusammenhang zwischen diesen mannigfachen und von einander gänzlich unabhängigen Reihen von Veränderungen besteht. Eine besondere Einwirkung der Einen auf die Andere kann nicht geschehen, denn „les monades n'on point de fenêtres, par lesquelles quelque chose y puisse entrer ou sortir.“[1]) Soll also eine Art Zusammenhang zwischen diesen Veränderungsreihen bestehen, sodass sich mit der Veränderung in der einen Monas die korrespondierende in der anderen zugleich vorfinde, so muss, da eine gelegentliche Einwirkung der Gottheit ausgeschlossen ist, damit das Ganze nicht planlos zusammengewürfelt, sondern vom Standpunkt der höchsten Weisheit aus geordnet erscheine, von den Monaden innewohnenden Gesetzen aus gewirkt werden. Diese Gesetze müssen so beschaffen sein, dass sich, so oft sich nach dem in einer der Monaden tätigen Gesetze zu einem gewissen Zeitpunkt ein bestimmter Zustand mitteilt, in allen übrigen Monaden infolge ihrer Gesetze die entsprechenden und anpassenden erzeugen. Da zu deren Auswahl vollständige Erkenntnis aller möglichen Gesetze dieser Art notwendig ist und ferner unendliche Macht, um diese Gesetze in den Monaden auch wirklich zur Tätigkeit zu bringen, so konnte nur Gott es sein, der die Monaden mit ihren Gesetzen geschaffen hat.

In diesen Schlussfolgerungen besonders finden wir die Infinitesimalgedanken fruchtbar verwertet. Wir sahen, dass unter den Monaden insofern ein „idealer Einfluss“ herrscht,

[1]) Monad. S. 705.

als durch Veränderung in einer Monade gewisse gesetzmässige Veränderungen in den anderen Monaden stattfinden. Übertragen wir dies in die Sprache der Mathematik: Zwei veränderliche Grössen stehen in einer bestimmten Beziehung zu einander und zwar so, dass bei Änderung der einen Variablen die andere sich nach dem zwischen beiden bestehenden Gesetze ändert: wir sagen, sie stehen in Funktion miteinander.

Solange die Änderungen der Variablen noch endliche Werte haben, und wir die beiderseitigen Änderungen mit einander vergleichen, so erhalten wir einen Quotienten, der weiter nichts ist als ein algebraisches Verhältnis und uns nur angibt, wie oft die eine Änderung in der anderen enthalten ist. Lassen wir jedoch die Änderung der einen Variabeln unendlich klein werden, so muss, Stetigkeit der Funktion vorausgesetzt, auch die der anderen unendlich klein werden und wir erhalten den Differentialquotienten. Wir sind somit im stande, qualitative Inhalte miteinander in Beziehung zu bringen und zu vergleichen, da ja die Quantität durch den Übergang zur Null aufgehoben ist.

Auch von den Veränderungsreihen zweier Monaden können wir sagen, sie stehen in Funktion miteinander, die Gott in sie hineingelegt hat. Ändert sich somit der Zustand der einen Monade, so muss notwendig in einer oder mehreren anderen ebenfalls eine Änderung erfolgen, nach dem von Gott bestimmten Gesetze. Da die Zustandsänderungen in einer Monade jedoch nach dem Gesetze der Kontinuität, das überall nach Leibniz' Annahme in der Natur gilt, nur unendlich klein sein können, so muss auch die Änderung in einer anderen unendlich klein sein. Vergleichen wir diese Änderungen, die nur qualitativer Natur sein können, miteinander, so haben wir wirklich einen Differentialquotienten vor uns. In seiner Monadologie drückt Leibniz dies so aus: „Unter den einfachen Substanzen herrscht ein idealer Einfluss einer Monade auf die andere, und dieser gelangt zu seiner Wirkung nicht anders, als durch die Dazwischenkunft Gottes selbst, indem in seinem Gedankenkreise jede Monade mit Recht verlangen kann, dass er bei Anordnung und Regelung der übrigen von Anbeginn der Dinge her auf sie Rücksicht nehme. Denn da keine geschaffene Monade einen physischen Einfluss auf das Innere einer anderen nehmen kann, so bleibt dies als das einzige Mittel übrig, um die eine in der Abhängigkeit von der anderen zu erhalten."

Die Monaden stehen aber nicht nur unter sich in einem ganz bestimmten Verhältnis, sondern jede Monade tritt wiederum in Beziehung zu dem ganzen geordneten Kosmos, zu der Gesamtheit der übrigen Monaden. Die Veränderungen also, die in dem ganzen Kosmos vor sich gehen, müssen auch ihre Wirkungen in der einzelnen Monade offenbaren. Über diesen Zusammenhang gibt Leibniz die Erklärung:[1]) „Diese innige Verknüpfung (liaison), oder die Übereinstimmunng aller geschaffenen Dinge mit jedem Einzelnen und jedes Einzelnen mit allen Übrigen macht, dass jede einfache Substanz Beziehungen an sich trägt, die ein Abdruck aller übrigen Substanzen sind, und folglich jede einzelne gleichsam als ein lebender, immerwährender Spiegel des Universums erscheint." Jede Monade hat ihre bestimmte Stelle, ihren bestimmten Rang und ihre besondere Aufgabe in der Welt, von der sie ein integrierendes Glied bildet. Indem sie ihre eigene Natur vorstellt, stellt sie mit derselben in gewisser Weise zugleich alle übrigen Wesen vor, mit denen sie in gesetzlicher Beziehung steht. Infolge dessen ist jede Monade eine Welt im Kleinen (petit monde), ein koncentriertes Universum (univers concentré), ein Mikrokosmos. Auch hier sehen wir wieder die Monade gleichsam als Differential gedacht. Wie das Differential vermöge seiner Qualität die Grösse repräsentiert, so ist die Monade Representant des Weltalls in all seinen Eigenschaften. Darum sagt Leibniz:[2]) „Chaque Monade est un miroir vivant, où doué d'action interne représentatif l'Univers." Wenn es nun auch wegen der unendlichen Menge einfacher Substanzen ebenso viele verschiedene Welten zu geben scheint, so sind diese, genauer besehen, nichts anderes, als die ver-

1) Monad. 709. 2) Principe de la Nature et de la Grace Nr. 3, p. 775.

schiedenen Ansichten der einzigen von den verschiedenen Standpunkten der einzelnen Monaden angesehenen Welt; gerade wie ein und dieselbe Stadt, von verschiedenen Seiten betrachtet, immer als eine andere, gleichsam vervielfältigt erscheint. Die Gleichung oder Definition einer Figur kann auf unendlich viele verschiedene Arten gegeben werden, deren jede eine besondere Eigenschaft offenbart. Der Zusammenhang dieser verschiedenen Formen der Definition ist ein rein geistiger, und jede derselben stellt die ganze Natur der Figur, von einem besonderen Punkt aus betrachet, dar. In gleicher Weise ist die unendliche Zahl der wirklichen Dinge, jedes derselben auf verschiedene Weise und von einem besonderen Gesichtspunkt aus, der Ausdruck der ganzen Welt, des Ganzen der wunderbar verwickelten und verschlungenen Gedankenketten, die das Wesen der Welt ausmachen. Wir können mit Leibniz diesen Gedanken in den Worten ausdrücken: jedes wirkliche Ding ist in seinem unendlichen geistigen Leben ein Spiegel des Universums, ein Spiegel des wirklichen zwischen ihm und allen anderen Dingen bestehenden Zusammenhangs.

Somit sehen wir, dass der Wunsch, in allen Dingen Harmonie und Stetigkeit zu sehen, in Leibniz' Geist eine mächtige Stütze an den mathematischen Begriffen von dem Unendlich-Kleinen gefunden hat, das durch unendliches Hinzufügen zu Endlichen und von Endlichen zu unendlich grossen Dimensionen anwächst. Dieser mathematische Gesichtspunkt aber hatte die Ideen unseres Philosophen auch noch nach einer anderen Richtung hin beeinflusst und ihn zu einer Auffassung der Beziehungen der Dinge geführt, die zugleich neu und weitreichend war. Rein geometrische Verbindungen waren in der neueren Wissenschaft durch analytische Formeln ersetzt worden; die ausgedehnte geometrische Figur, die vor unserem Blick ihre vielen räumlichen Eigenschaften entfaltet, war auf eine Gleichung zurückgeführt worden; die vielen Eigenschaften der Figur waren für den, der sie verstand, alle in der Gleichung enthalten; sie standen miteinander in logischem oder geistigem Zusammenhang; die räumliche Ordnung war einer geistigen gewichen. So wie der Geist sein Licht auf die verschiedenen Glieder dieser logischen Schlussketten wirft, werden die verschiedenen Eigenschaften offenbar. Und warum soll der Zusammenhang der wirklichen Dinge dieser Welt nicht derselbe sein? Das, was in Raum und Zeit in keinem Zusammenhang zu stehen oder nicht klar miteinander verkettet zu sein scheint, würde für Ihn, der alles geschaffen hat, dieselbe notwendige geistige Ordnung und Harmonie zeigen, welche sich dem mathematischen Geist, der den Schlüssel, d. h. die Gleichung oder Formel zu der Figur besitzt, in den vielen Eigenschaften oder Teilen z. B. einer Kugel offenbart. Demnach ständen alle Dinge in dem Geiste ihres denkenden Schöpfers in Zusammenhang miteinander. Gleich wie der Kegel, der Cylinder und die Kugel in dem Geiste eines Archimedes durch jenes berühmte auf seinem Grabstein eingegrabene Symbol unauslöschlich untereinander zusammenhingen, so sind die Glieder dieser Welt, wie die Glieder eines logischen Denkprozesses, in dem Geiste des Schöpfers, seit er sie zum erstenmale erdachte, d. h. erschuf, geistig miteinander verkettet. Die Ordnung der Dinge, die unseren verwirrten Sinnen als die des Raumes, die der Zeit, sowie der Ursache und der Wirkung erscheint, schwindet in dem klaren Licht des Denkens und weicht einer in dem Geiste des Schöpfers, in dem Geiste Gottes lebenden geistigen Ordnung.

Literatur.

1. Die philosophischen Schriften von G. W. Leibniz, hg. von Gerhardt. 7 Bände Berlin 1875—90. = Phil.
2. Leibnizens mathematische Schriften, hg. von Gerhardt. 7 Bände. Berlin 1848—63. = Math.
3. Leibniz' deutsche Schriften, hg. von G. E. Guhrauer. 2 Bände. Berlin 1838—1840. = Guhrauer.
4. Leibnitii opera philosophica, ed. J. Erdmann. Berol. 1840. = Erdm.
5. Leibniz' Monadologie, hg. von Zimmermann 1847. = Monad.
6. Leibniz' System in seinen wissenschaftlichen Grundlagen von E. Kassierer 1902.
7. Das Problem der Kontinuität, von F. A. Müller 1886.
8. Leibniz' Bedeutung in der Geschichte der Mathematik von A. Harnack 1887.
9. Die Entwickelung der Leibnizschen Monadenlehre von S. Auerbach 1884.
10. Die Theodice, hg. von J. H. v. Kirchmann 1879.